



# Varianten des 4-Punkt-Schemas

Bachelorarbeit  
von

**Sebastian Schmidt**

an der Fakultät für Informatik  
Institut für Visualisierung und Datenanalyse  
Angewandte Geometrie (CAGD)

Erstgutachter:	Prof. Dr. Hartmut Prautzsch
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Carsten Dachsbacher
Betreuer:	Prof. Dr. Hartmut Prautzsch

Bearbeitungszeit: 01. Mai 2015 – 31. August 2015



## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig erstellt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Karlsruhe, den 31. August 2015



## **Danksagung**

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Hartmut Prautzsch danken, der mir bei der Erstellung dieser Arbeit mit viel Geduld und Zeit beiseite stand.



## Kurzfassung

Unterteilungsalgorithmen für Kurven werden im Computer Aided Design, der Animation von Objekten und der Computergrafik immer beliebter. Sie sind leicht zu implementieren und meistens effizienter als traditionelle Methoden zur Generierung von Kurven wie zum Beispiel die Spline-Interpolation. In dieser Arbeit wird ein interpolierender und konvexitätserhaltender geometrischer Unterteilungsalgorithmus auf Glattheit untersucht. Der Algorithmus arbeitet auf einem streng konvexen Polygon mit frei wählbaren Tangenten. Zunächst wird anhand eines Gegenbeispiels gezeigt, dass der Algorithmus im allgemeinen keine glatte Kurve erzeugt. Darauf aufbauend wird eine einschränkende Bedingung an die Eingabe festgelegt, die das Gegenbeispiel ausschließt. Mit dieser Bedingung und zwei weiteren Forderungen wird gezeigt, dass der Algorithmus  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt. Es wird gezeigt, dass neue Punkte in einem bestimmten Bereich eingefügt werden und ein Ergebnis von Paluszny et al. angewandt. Die beiden zusätzlichen Forderungen werden experimentell untersucht. Damit wird der Grundstein für die weitere Untersuchung der Forderungen gelegt. Mit dem Ergebnis von Paluszny et al. wird anschließend ein Schema konstruiert, welches ebenfalls interpolierend und konvexitätserhaltend ist, und das per Konstruktion  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Zielsetzung der Arbeit . . . . .	2
1.2	Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Unterteilungsalgorithmen</b>	<b>3</b>
2.1	Klassifikation . . . . .	3
2.2	Gütekriterien für Grenzkurven . . . . .	5
2.3	Das 4-Punkt-Schema . . . . .	5
2.4	Das konvexe Schema . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Glattheitsbeweis zum konvexen Schema</b>	<b>11</b>
3.1	Gegenbeispiel . . . . .	12
3.2	Einschränkungen . . . . .	12
3.3	Verhalten der Eckenwinkel . . . . .	13
3.4	Schranken für die Winkelverhältnisse . . . . .	14
3.5	Glattheit der dualen Kurve . . . . .	22
3.6	Das glatte Schema . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Untersuchung der nicht bewiesenen Bedingungen</b>	<b>25</b>
4.1	Kantenlängenverhältnisse . . . . .	26
4.2	Winkelverhältnisse . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>Ergebnisse der Experimente</b>	<b>29</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>33</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Unterteilung mit dem 4-Punkt-Schema . . . . .	6
2.2	Unterteilungsschritt des 4-Punkt-Schemas . . . . .	6
2.3	Unterteilungsschritt des konvexen Schemas . . . . .	9
2.4	Unterteilung mit dem konvexen Schema . . . . .	10
3.1	Darstellung der Winkelverhältnisse . . . . .	15
3.2	Skizze zum Beweis der oberen Schranke von $\sigma$ . . . . .	17
3.3	Skizze zum Beweis der unteren Schranke von $\sigma$ und $\tau$ für $w_i^k = w$ . . . . .	19
3.4	Skizze zum Beweis über die untere Schranke von $\sigma$ und $\tau$ . . . . .	20
3.5	Die Konstruktion des Punktes $\mathbf{r}$ . . . . .	21
3.6	Unterteilungsschritt des glatten Schemas . . . . .	23
3.7	Unterteilung mit dem glatten Schema . . . . .	23
4.1	Das Quadrat und das Trapez für die Experimente . . . . .	25



# Tabellenverzeichnis

A.1	Maximale Kantenlängenverhältnisse bei Unterteilung eines Quadrats mit $w = 1/16$ und $c = 0,9$ . . . . .	29
A.2	Maximale Kantenlängenverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit $w = 1/16$ und $c = 0,9$ . . . . .	29
A.3	Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Quadrats mit $w = 1/16$ und $c = 0,9$ . . . . .	30
A.4	Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Quadrats mit $w = 1/16$ und $c = 0,8$ . . . . .	30
A.5	Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit $w = 1/16$ und $c = 0,9$ . . . . .	31
A.6	Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit $w = 1/32$ und $c = 0,8$ . . . . .	31
A.7	Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit $w = 1/32$ und $c = 0,5$ . . . . .	32



# 1 Einleitung

In der Computergrafik, der Animation von Objekten und dem Computergestützten Design gehört das Interpolieren von Kurven aus vorgegebenen Kontrollpunkten heutzutage zu den Standardaufgaben. Ein Animator möchte beispielsweise nicht für jeden Frame seiner Animation die Koordinaten und Orientierungen aller Objekte vorgeben müssen. Er gibt die Koordinaten und Orientierung jedes Objekts nur an bestimmten charakterisierenden Schlüsselstellen vor. Also zum Beispiel den Anfang einer Bewegung oder eine Änderung der Bewegungsrichtung. Die Positionen zwischen diesen Schlüsselstellen, die für die Erstellung der Animation benötigt werden, berechnet die Software dann automatisch anhand der Schlüsselstellen.

Eine andere typische Anwendung für Interpolation ist die Erzeugung von Kurven. Wenn zum Beispiel eine Konstrukteurin mit CAD-Software am Querschnitt einer Tragfläche arbeitet, gibt sie dessen Struktur anhand von einigen Kontrollpunkten vor. Die Software generiert daraus automatisch eine glatte Kurve.

Ein verbreiteter Ansatz zur Berechnung dieser Zwischenpositionen sind Unterteilungsalgorithmen. Sie verfeinern das durch die Schlüsselstellen vorgegebene Polygon schrittweise und erzeugen dadurch eine stetige Kurve. Ein Unterteilungsalgorithmus kommt meistens mit wenigen Gleitkommaoperationen aus. Außerdem arbeitet er nur lokal auf wenigen konsekutiven Punkten und ist leicht zu parallelisieren. Des weiteren passt sich der Rechenaufwand von Unterteilungsalgorithmen sehr gut an die gewünschte Punktdichte an, da man für jeden beliebigen Bereich des Polygons beliebig wählen kann, wie oft dieser unterteilt werden soll. Daher werden Unterteilungsalgorithmen immer häufiger in den genannten Gebieten eingesetzt.

Ein simpler, effizienter und gut untersuchter interpolierender Unterteilungsalgorithmus ist das 4-Punkt-Schema [Dyn et al. '87], welches glatte und visuell ansprechende Kurven erzeugt. Allerdings erzeugt es für bestimmte Eingaben auch unerwünschte Schleifen oder Wellen, gerade dann, wenn die Punktdichte des Eingabepolygons stellenweise stark variiert oder das Eingabepolygon die Kurve in „unnatürliche“ Formen zwingt. Eine zusätzliche Welle in einem Tragflächenprofil kann zum Beispiel zu verringertem Auftrieb führen, und eine zusätzliche Schleife in einer Animation verfremdet die Bewegung. In [Marinov et al. '05] wurde eine konvexitäterhaltende Variante des 4-Punkt-Schemas vorgeschlagen, die solche Artefakte nicht erzeugt. Diese wird im Folgenden das „konvexe Schema“ genannt.

## 1 Einleitung

Damit lässt sich die Form der Grenzkurve besser kontrollieren, und es können keine zusätzlichen Schleifen oder Wellen entstehen.

Über das konvexe Schema ist nicht viel bekannt, außer dass es uniform gegen eine stetige Grenzkurve konvergiert und (strenge) Konvexität erhält. Außerdem scheint es  $C^1$ -stetige Grenzkurven zu erzeugen, aber dazu gibt es nach Wissen des Autors zur Entstehungszeit dieser Arbeit noch keinen Beweis und kein Gegenbeispiel.

### 1.1 Zielsetzung der Arbeit

In [Marinov et al. '05] wurde vermutet, dass das konvexe Schema  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt. Ziel der Arbeit ist es, diese Vermutung genauer zu untersuchen. Es werden also Fälle gesucht, in denen das konvexe Schema glatte Kurven erzeugt, und Fälle, in denen das nicht zutrifft. Idealerweise sollen alle möglichen Fälle abgedeckt werden.

### 1.2 Gliederung der Arbeit

Zunächst werden in Kapitel 2 Unterteilungsalgorithmen im Allgemeinen behandelt. Dazu werden mögliche Klassen für Unterteilungsalgorithmen und mögliche Gütekriterien für die von einem Unterteilungsalgorithmus erzeugten Grenzkurven herausgegriffen. Bei der Klassifikation wird der Schwerpunkt auf Klassen für Unterteilungsalgorithmen für Kurven gesetzt, da das in dieser Arbeit genauer betrachtete Schema Kurven generiert. Dann wird das 4-Punkt-Schema eingeführt, und mit dem 4-Punkt-Schema als Grundlage dann das konvexe Schema.

In Kapitel 3 wird die  $C^1$ -Stetigkeit der durch das konvexe Schema erzeugten Grenzkurven unter bestimmten Annahmen gezeigt. Zunächst wird ein Gegenbeispiel angegeben, welches mit einer einschränkenden Bedingung für das konvexe Schema ausgeschlossen wird. Dann werden noch zwei Annahmen getroffen, die nicht bewiesen werden. Dabei handelt es sich um die Beschränkung des Längenverhältnisses aufeinanderfolgender Kanten und die Beschränkung des Winkelverhältnisses aufeinanderfolgender Punkte. Mit der einschränkenden Bedingung und den beiden Annahmen wird gezeigt, dass das konvexe Schema  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt. Abschließend werden als Randbemerkung noch zwei weitere im Rahmen dieser Arbeit entstandene Schemata eingeführt, die  $C^1$ -stetige Kurven erzeugen und dem konvexen Schema ähneln.

In Kapitel 4 werden die beiden Annahmen, die in Kapitel 3 nicht bewiesen wurden, experimentell untersucht.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche weitere Arbeiten gegeben.



## 2 Unterteilungsalgorithmen

Unterteilungsalgorithmen sind Algorithmen, die eine Kontrollstruktur, also ein Netz, ein Kurvennetz, ein Netz mit Tangenten-Hyperebenen, ein Netz mit Normalvektoren usw., schrittweise verfeinern. Dadurch wird eine Folge  $S := \{S^k\}_{k=0}^\infty$  definiert, wobei  $S^0$  die Eingabestruktur ist, und  $S^{k+1} := U_k(S^k)$  durch einmalige Unterteilung, also einmalige Anwendung von  $U_k$  auf  $S^k$  entsteht.  $U_k$  ist der  $k$ -te Unterteilungsschritt des Algorithmus, dieser kann zum Beispiel eine Unterteilungsvorschrift oder ein Unterteilungsoperator sein. Er kann zum Beispiel abhängig von der Schrittzahl  $k$  oder der Geometrie der Kontrollstruktur  $S^k$  sein. Die Strukturen  $S^k$  werden mit jeder Unterteilung dichter, und konvergieren im Allgemeinen gegen eine stetige oder glattere Fläche oder Kurve  $S^\infty$ .

### 2.1 Klassifikation

Es gibt verschiedene Klassen von Unterteilungsalgorithmen. Hier werden nur Unterteilungsalgorithmen betrachtet, deren Eingabestruktur auf einem Kontrollnetz basiert. Ein Kontrollnetz besteht aus einer Menge von Kontrollpunkten und einer Adjazenzrelation. Es kann zum Beispiel ein Polygonzug oder ein regelmäßiges Vierecksnetz sein.

Zunächst lässt sich zwischen Unterteilungsalgorithmen für Kurven und Unterteilungsalgorithmen für Flächen unterscheiden.

Weiter kann man zwischen interpolierenden Algorithmen unterscheiden, bei denen die Grenzstruktur alle Kontrollpunkte des Eingabenetzes enthält, und nicht-interpolierenden, bei denen das im Allgemeinen nicht der Fall ist. Ein sehr bekannter nicht-interpolierender Unterteilungsalgorithmus für Kurven ist der De Casteljau-Algorithmus. Ein Beispiel für einen interpolierenden Unterteilungsalgorithmus für Flächen ist das Butterfly-Schema [Dyn et al. '90].

Eine spezielle Unterklasse von Nicht-interpolierenden Unterteilungsalgorithmen für Kurven sind die sogenannten Corner-Cutting-Algorithmen. Solche Algorithmen verfeinern das Eingabepolygon, indem sie in jedem Schritt Ecken des Eingabepolygons abschneiden. Ein einfacher und sehr bekannter Corner-Cutting-Algorithmus ist der Algorithmus von Chaikin [Chaikin '74].

Interpolierende Unterteilungsalgorithmen für Kurven lassen sich als binär, ternär, quaternär und so weiter klassifizieren. Dabei bedeutet binär, dass zwischen zwei

## 2 Unterteilungsalgorithmen

Kontrollpunkten immer ein neuer eingefügt wird, sich die Anzahl der Punkte also in jedem Schritt verdoppelt, ternär, dass zwei neue eingefügt werden,  $\dots$ . Das lässt sich beliebig weit fortsetzen. Das 4-Punkt-Schema ist zum Beispiel ein binärer Unterteilungsalgorithmus, das Schema von Beccari, Casciola und Romani ist ein ternärer Unterteilungsalgorithmus [Beccari et al. '07].

Eine weitere Unterscheidung zur Klassifikation von Unterteilungsalgorithmen ist die (Nicht-)Linearität. Der Unterteilungsschritt eines linearen Schemas für Kurven lässt sich durch eine Matrix oder ein Symbol beschreiben, was die Analyse vereinfacht. Nicht-lineare Schemata lassen sich so nicht beschreiben.

Das führt zur nächsten Klasse, den linearen stationären Unterteilungsalgorithmen, welche auch als stationäre Unterteilungsalgorithmen bezeichnet werden. Ein stationärer Unterteilungsalgorithmus muss aber nicht linear sein. Bei einem linearen stationären Algorithmus wird jeder Ausgabepunkt unabhängig von der Schrittanzahl als Linearkombination bestimmter Eingabepunkte bestimmt. Meistens gibt es zwei solcher Linearkombinationen, speziell bei binären Algorithmen, oder vier, bei Algorithmen für Flächen. Die Linearkombinationen sind in jedem Unterteilungsschritt gleich. Der Vorteil davon ist, dass auf einfache Weise ein Algorithmus für regelmäßige Eingabestrukturen beschrieben werden kann, wie zum Beispiel regelmäßige Vierecksnetze oder Polygonzüge. Der Catmull-Clark Algorithmus zur Unterteilung von beliebigen Netzen ist ein Beispiel für einen stationären, linearen Algorithmus [Catmull & Clark '78]. Ein nicht-stationärer Unterteilungsalgorithmus definiert verschiedene Regeln je nach Unterteilungsstufe. Dazu kann zum Beispiel ein Parameter  $x$  durch eine nicht-stationäre Folge von Parametern  $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$  ausgetauscht werden. Dadurch können interessante Formen aus einfachen Eingabestrukturen entstehen, wie zum Beispiel beim Unterteilungsschema von Beccari et al. [Beccari et al. '07]. Ein nicht-stationärer Unterteilungsalgorithmus kann, muss aber nicht, linear sein. Ein linearer nicht-stationärer Unterteilungsalgorithmus kann analysiert werden, indem die Konvergenz der Folge seiner Unterteilungsschritte gegen den Unterteilungsschritt eines linearen stationären Unterteilungsalgorithmus konvergiert [Dyn & Levin '95].

Nicht-lineare Schemata werden auch als geometrische Schemata bezeichnet, da ein Unterteilungsschritt von der jeweiligen lokalen Konfiguration der Punkte abhängt. Zum Beispiel werden Winkel oder andere nicht-lineare Funktionen als Eingabeparameter für die Unterteilungsoperation genutzt. Damit können potentiell Kurven oder Flächen mit weniger unerwünschten Artefakten oder bestimmten Eigenschaften erzeugt werden. Beispielsweise können Unregelmäßigkeiten in der Krümmung [Sabin & Dodgson '04] oder Schlaufen [Marinov et al. '05] beseitigt werden.

## 2.2 Gütekriterien für Grenzkurven

Für Unterteilungsalgorithmen gibt es verschiedene Gütekriterien und Eigenschaften.

Das Mindestkriterium ist die uniforme Konvergenz gegen eine uniform stetige Kurve. Ein Algorithmus, der keine uniform konvergente Polygonfolge erzeugt, ist für die Generierung von Kurven in der Praxis unbrauchbar.

Ein mögliches Kriterium für eine visuell glatte Grenzkurve ist die  $C^1$ -Stetigkeit. Eine  $C^1$ -stetige Kurve enthält zwar keine Ecken, die Krümmung kann aber stellenweise trotzdem so stark sein, dass die Kurve eckig aussieht. Um das zu vermeiden kann man fordern, dass eine Grenzkurve außerdem noch  $C^2$ -stetig ist.  $C^2$ -stetige Kurven haben einen glatteren Krümmungsverlauf als Kurven, die „nur“  $C^1$ -stetig sind. Dadurch sind visuell erkennbare Ecken schwerer zu erzeugen. Weiter gibt es noch Algorithmen, die  $C^n$ -stetige Kurven erzeugen, für  $n \geq 3$ . Solche Kurven können noch glatter aussehen.

Des weiteren gibt es noch einige geometrische Gütekriterien. Zum Beispiel kann es gewünscht sein, dass die Grenzkurve keine linearen Segmente enthält. Oder man möchte, dass das Schema kreiserhaltend ist und zum Beispiel aus einem regelmäßigen  $n$ -Eck einen Kreis erzeugt. Als weiteres geometrisches Gütekriterium gibt es die Erhaltung von Konvexität. Während nicht konvexitätserhaltende Schemata aus konvexen Eingabepolygonen Grenzkurven mit Schleifen und Wellen erzeugen können, ist das bei konvexitätserhaltenden Schemata ausgeschlossen.

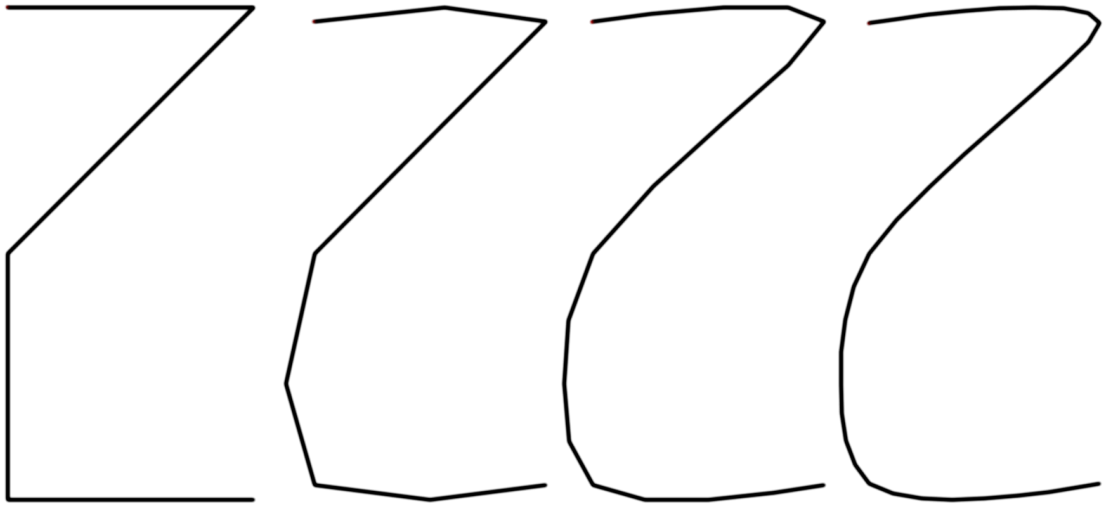
## 2.3 Das 4-Punkt-Schema

Das 4-Punkt-Schema wurde zuerst von David Levin vorgeschlagen und von Nira Dyn, ihm und John A. Gregory in [Dyn et al. '87] untersucht. Es ist ein binärer, interpolierender und stationärer Unterteilungsalgorithmus für Kurven mit einem Spannungsparameter  $w$ . Mit dem Spannungsparameter lässt sich kontrollieren, wie eng die Kurve am Kontrollpolygon liegen soll. Ist  $w = 0$ , so entspricht die Grenzkurve dem Kontrollpolygon. Wird  $w$  vergrößert, so entfernt sich die Grenzkurve immer weiter vom Kontrollpolygon. Ist  $w$  zu groß, so divergiert das Schema. In Abbildung 2.1 ist die dreimalige Unterteilung eines Polygons mit dem 4-Punkt-Schema mit  $w = 1/16$  dargestellt.

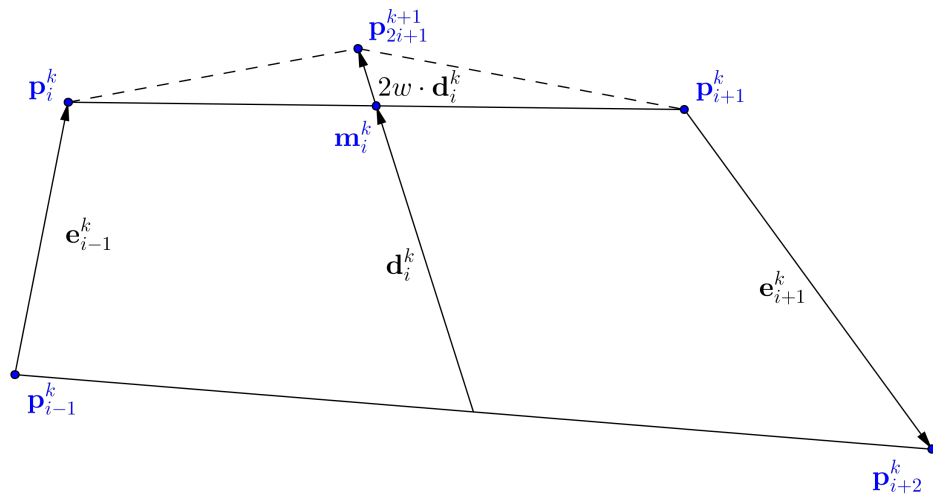
Das 4-Punkt-Schema arbeitet auf Kurven im  $\mathbb{R}^d$  mit  $d \geq 1$ . Es erzeugt aus einem Eingabepolygon  $P^0$  eine Polygonfolge  $P := \{P^k\}_{k=0}^\infty$ , die der am Anfang des Kapitels definierten Folge  $S$  mit Polygonen als Kontrollstrukturen entspricht.

Für ein  $P^k$  sind die  $\mathbf{p}_i^k \in P^k$  die Punkte des Polygons. Im Schritt  $k$  läuft  $i$  von 0 bis  $i_{max}^k := |P^k| - 1$ .  $i_{max}^k$  lässt sich mit  $i_{max}^k = (i_{max}^0 - 1) \cdot 2^k$  für gegebenes  $i_{max}^0$

## 2 Unterteilungsalgorithmen



**Abbildung 2.1:** Anwendung des 4-Punkt-Schemas mit  $w = 1/16$  auf ein Eingabepolygon. Links ist das Eingabepolygon dargestellt, daneben jeweils das Ergebnis des ersten, zweiten und dritten Unterteilungsschritts.



**Abbildung 2.2:** Skizze des Unterteilungsschritts des 4-Punkt-Schemas.

berechnen. Für einfachere Lesbarkeit wird der Punkt an der Stelle  $i_{max}^k$  mit  $\mathbf{p}_{max}^k$  bezeichnet.

Die Unterteilungsvorschrift sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{2i}^{k+1} &= \mathbf{p}_i^k, \\
 \mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} &= \left(w + \frac{1}{2}\right) \cdot (\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i+1}^k) - w \cdot (\mathbf{p}_{i-1}^k + \mathbf{p}_{i+2}^k) \\
 &= \frac{\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i+1}^k}{2} + w \cdot (\mathbf{p}_i^k - \mathbf{p}_{i-1}^k + \mathbf{p}_{i+1}^k - \mathbf{p}_{i+2}^k) \\
 &=: \frac{\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i+1}^k}{2} + w \cdot (\mathbf{e}_{i-1}^k - \mathbf{e}_{i+1}^k) \\
 &=: \mathbf{m}_i^k + w \cdot \mathbf{d}_i^k.
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Dabei ist  $\mathbf{m}_i^k := (\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i+1}^k)/2$  der Mittelpunkt zwischen  $\mathbf{p}_i^k$  und  $\mathbf{p}_{i+1}^k$ , und  $\mathbf{e}_i^k := \mathbf{p}_{i+1}^k - \mathbf{p}_i^k$  der Kantenvektor von  $\mathbf{p}_i^k$  nach  $\mathbf{p}_{i+1}^k$ . Außerdem ist  $\mathbf{d}_i^k := \mathbf{e}_{i-1}^k - \mathbf{e}_{i+1}^k$  der Verschiebungsvektor von  $\mathbf{m}_i^k$  nach  $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$ . Die Vorschrift ist in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

Ist das Eingabepolygon  $P^k$  offen, ist Vorschrift (2.3.2) auf den Endkanten nicht definiert. Um das zu korrigieren kann man zum Beispiel die Endpunkte verdoppeln, also  $\mathbf{p}_{-1}^k := \mathbf{p}_0^k$  und  $\mathbf{p}_{max+1}^k := \mathbf{p}_{max}^k$  definieren. Da die Beweise in dieser Arbeit unter Ausschluss der Endtangente geführt werden, ist diese Korrektur hier nicht notwendig.

Wegen 2.3.1 bleiben die Kontrollpunkte beim Iterieren immer erhalten; daher ist der Algorithmus interpolierend. Da die Unterteilungsvorschrift in jedem Schritt gleich ist, ist der Algorithmus stationär. Der Algorithmus lässt sich auf Polygone im  $\mathbb{R}^d$  anwenden. Hier sind aber nur Polygone im  $\mathbb{R}^2$  relevant, da die untersuchte Variante des 4-Punkt-Schemas nur in der Ebene definiert ist.

Für  $w \in (-1/2, (\sqrt{17} - 1)/8]$  konvergiert das Schema uniform gegen eine stetige Grenzkurve [Michelli & Prautzsch '88, Dyn et al. '91]. Wird  $w \in (0, w^* \approx 0,19273)$  gewählt, erzeugt das 4-Punkt-Schema  $C^1$ -stetige Kurven, wobei  $w^*$  die eindeutige reelle Lösung der kubischen Gleichung  $32w^3 + 4w - 1 = 0$  ist [Hechler et al. '09]. Für  $w = \frac{1}{16}$  ist die Grenzkurve fast  $C^2$ -stetig [Dubuc '86], mit einer Hölder-Regularität von  $2 - \epsilon$  [Marinov et al. '05]. Außerdem erzeugt das 4-Punkt-Schema  $C^1$ -stetige Kurven, wenn für jeden Punkt  $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$  ein  $w_i^k \in [w_{min}, w_{max}] \subset (0, 1/8)$  gewählt wird [Levin '99].

## 2.4 Das konvexe Schema

In [Marinov et al. '05] wurde eine konvexitätserhaltende Variante des 4-Punkt-Schemas, hier als „konvexes Schema“ bezeichnet, vorgeschlagen. Dieses ist ebenfalls interpolierend und binär, aber nicht mehr stationär oder linear. Außerdem ist es nur im  $\mathbb{R}^2$  definiert. Um diese Variante zu beschreiben, sind zunächst einmal einige Begriffe notwendig.

## 2 Unterteilungsalgorithmen

### Definition 2.4.1:

Seien  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  Punkte. Dann ist  $\mathbf{ab} := \mathbf{b} - \mathbf{a}$  der Vektor von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  und  $\overline{\mathbf{ab}} := \{\mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{ab}\}$  die Gerade durch  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . Außerdem sei  $\overline{A}$  die eindeutig durch eine mehrelementige Menge  $A$  kollinearer Punkte aufgespannte Gerade.

### Definition 2.4.2:

Sei  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (-\pi, \pi]$  der Winkel von Vektor  $\mathbf{a}$  nach Vektor  $\mathbf{b}$  gegen den Uhrzeigersinn. Sei  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \angle(\mathbf{ba}, \mathbf{bc})$  der durch die drei Punkte  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  definierte Winkel. Sei  $\text{winkel}(\mathbf{e}_i^k) := \angle(\mathbf{e}_{i-1}^k, \mathbf{e}_{i+1}^k)$ ,  $\text{winkel}(\mathbf{p}_i^k) := \angle(\mathbf{e}_{i-1}^k, \mathbf{e}_i^k)$ .

### Definition 2.4.3:

Ein streng konvexes Polygon  $P^k$  ist eine Linkskurve, wenn

$$\forall i \in \{1, \dots, i_{\max}^k - 1\} : \text{winkel}(\mathbf{p}_i^k) > 0.$$

Ein streng konvexes Polygon  $P^k$  ist eine Rechtskurve, wenn

$$\forall i \in \{1, \dots, i_{\max}^k - 1\} : \text{winkel}(\mathbf{p}_i^k) < 0.$$

Es gibt keine anderen streng konvexen Polygone.

### Definition 2.4.4:

Der erste und der letzte Kontrollpunkt eines offenen Polygons heißt Endpunkt. Alle anderen Punkte heißen innere Punkte. Ein geschlossenes Polygon besteht ausschließlich aus inneren Punkten.

Die Kontrollpunkte eines streng konvexen Polygons werden auch Ecken genannt.

### Definition 2.4.5:

Eine Gerade  $T_i^k$  durch eine innere Ecke  $\mathbf{p}_i^k$  eines streng konvexen Kontrollpolygons  $P^k$  heißt Tangente, wenn sie die konvexe Hülle von  $\mathbf{p}_{i-1}^k$ ,  $\mathbf{p}_i^k$  und  $\mathbf{p}_{i+1}^k$  genau in diesem Punkt schneidet. Eine Gerade durch den Anfangs- oder Endpunkt eines streng konvexen, offenen Kontrollpolygons heißt Tangente, solange sie die adjazente Kante nicht enthält.

Das konvexe Schema arbeitet auf durch Tangenten  $T_i^k := \{\mathbf{p}_i^k + \mathbb{R} \cdot \mathbf{t}_i^k\}$  für jeden Kontrollpunkt  $\mathbf{p}_i^k$  erweiterten streng konvexen Polygonen  $P^k$ . Man erhält das konvexe Schema aus dem 4-Punkt-Schema, indem man die Unterteilungsregel 2.3.2 durch die Regel

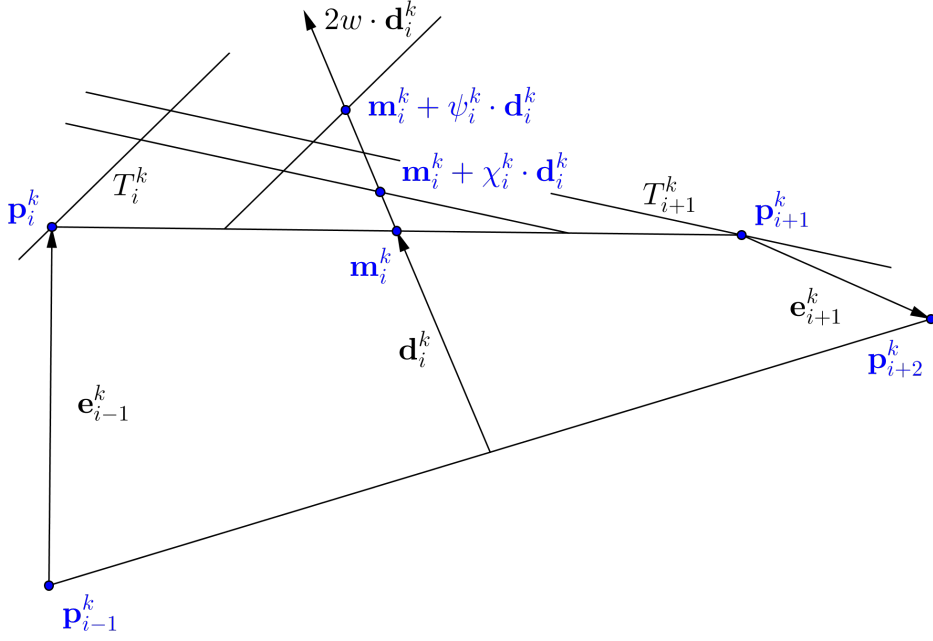
$$\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} := \mathbf{m}_i^k + w_i^k \cdot \mathbf{d}_i^k \quad (2.4.3)$$

ersetzt, wobei  $w_i^k$  der lokale Spannungsparameter mit

$$w_i^k := \min\{w, c \cdot \psi_i^k, c \cdot \chi_i^k\}$$

ist und  $c \in (0, 1)$  ein frei wählbarer globaler Skalierungsfaktor. Für  $\psi_i^k$  und  $\chi_i^k$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i^k + \psi_i^k \cdot \mathbf{d}_i^k &\in T_i^k, \\ \mathbf{m}_i^k + \chi_i^k \cdot \mathbf{d}_i^k &\in T_{i+1}^k. \end{aligned}$$



**Abbildung 2.3:** Skizze des Unterteilungsschritts des konvexen Schemas.  
Der Übersichtlichkeit halber wurde hier  $w = 1$  gewählt.

Sollte solch ein  $\psi_i^k$  oder  $\chi_i^k$  nicht existieren oder negativ sein, wird es auf  $w/c$  gesetzt. Die Mittelpunkte  $\mathbf{m}_i^k$ , die Verschiebungsvektoren  $\mathbf{d}_i^k$  und die Punkte  $\mathbf{p}_{2i}^{k+1}$  werden wie beim 4-Punkt-Schema berechnet. Der Spannungsparameter  $w$  wurde in [Marinov et al. '05] auf das Intervall  $(0, 1/8)$  beschränkt. Der Unterteilungsschritt ist in Abbildung 2.3 veranschaulicht.

Damit die Unterteilung auch im nächsten Schritt durchführbar ist, müssen für die Punkte ungeraden Indexes zusätzlich Tangenten gewählt werden. Die Tangenten der kopierten Punkte werden übernommen. Das Schema würde auch funktionieren, wenn die Tangenten jedes Mal neu gewählt würden.

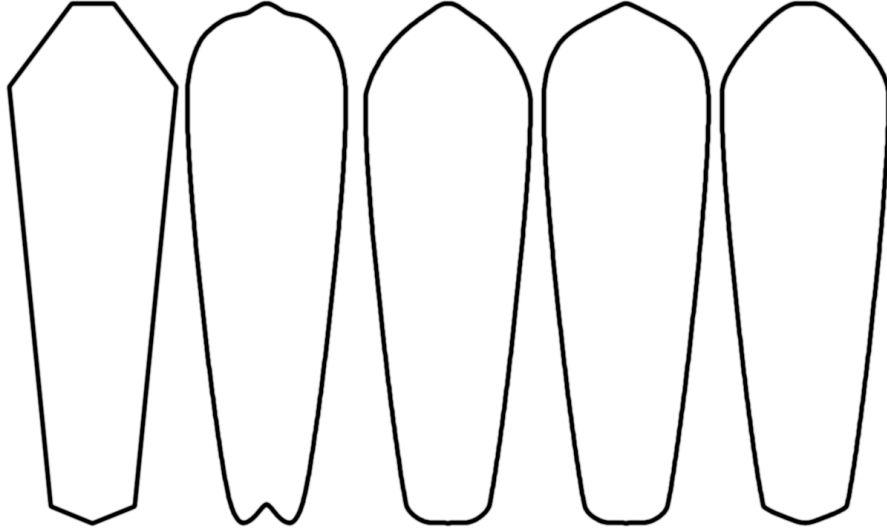
Die Endkanten können wie beim 4-Punkt-Schema behandelt werden, indem die Endpunkte verdoppelt werden. Die Tangente für den Endpunkt kann orthogonale zur Endkante gewählt werden.

Für ein streng konvexes Eingabepolygon  $P^0$  enthält die durch das konvexe Schema erzeugte Folge  $P$  nur streng konvexe Polygone und konvergiert gegen eine streng konvexe Kurve  $P^\infty$ .

Wäre  $c = 1$  wählbar, könnte ein nicht streng konvexes Polygon entstehen, indem  $\mathbf{p}_{2i-1}^{k+1}$ ,  $\mathbf{p}_{2i}^{k+1}$  und  $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$  auf  $T_i^k$  berechnet werden.

In [Marinov et al. '05] wurden außerdem mehrere Methoden vorgeschlagen, die Tangenten  $T_i^k$  zu wählen:

1.  $\mathbf{t}_i^k = \mathbf{p}_{i+1}^k - \mathbf{p}_{i-1}^k$



**Abbildung 2.4:** Unterteilung einer Kurve mit verschiedenen Schemata. Von links nach rechts sind das Eingabepolygon abgebildet, dann die Unterteilung durch das 4-Punkt-Schema mit  $w = 1/16$ , und zuletzt die Unterteilung mit dem konvexen Schema mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$  mit natürlicher und winkelhalbierender Tangentenwahl und Kreistangenten.

2.  $\mathbf{t}_i^k$  ist die Winkelhalbierende von  $\mathbf{e}_{i-1}^k$  und  $\mathbf{e}_i^k$
3.  $T_i^k$  ist die Tangente des durch  $\mathbf{p}_{i-1}^k$ ,  $\mathbf{p}_i^k$  und  $\mathbf{p}_{i+1}^k$  definierten Kreises im Punkt  $\mathbf{p}_i^k$ .

Die erste Methode ist die effizienteste, und laut der Autoren die natürlichste. Die so gewählte Tangente ist die der quadratischen Funktion, die durch die Punkte  $\mathbf{p}_{i-1}^k$ ,  $\mathbf{p}_i^k$  und  $\mathbf{p}_{i+1}^k$  definiert ist. Sie wird hier die „natürliche Tangentenwahl“ genannt. Werden die Tangenten nach der ersten Methode gewählt, hat die Grenzkurve laut den Autoren die beste visuelle Qualität. Die Autoren weisen aber darauf hin, dass auch andere Verfahren möglich sind. Werden die Tangenten nach einer dieser Methoden in jedem Schritt für alle Punkte neu gewählt, erhält man visuell glattere Kurven. Die zweite Methode wird hier die „winkelhalbierende Tangentenwahl“ genannt und die dritte die „Kreistangentenwahl“. In [Abbildung 2.4](#) werden die durch das konvexe Schema mit verschiedenen Tangentenwahlen erzeugten Kurven verglichen.

Das konvexe Schema erzeugt  $C^0$ -stetige Kurven, aber dem Autor ist zur Entstehungszeit dieser Arbeit keine Veröffentlichung bekannt, in der  $C^1$ -Stetigkeit für die erzeugten Kurven bewiesen wird. Im Vergleich zum 4-Punkt-Schema ist das konvexe Schema nicht stationär, weshalb sich die Analysemethoden für stationäre Schemata auf das konvexe Schema nicht anwenden lassen.



### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

In diesem Kapitel sei  $P := \{P^k\}_{k=0}^\infty$  eine Polygonfolge in  $\mathbb{R}^2$ , welche mit dem konvexen Schema aus einem gegebenen streng konvexen Eingabepolygon  $P^0$  mit Tangenten  $T_i^0$  erzeugt wurde. Die Richtungsvektoren der Tangenten werden als  $\mathbf{t}_i^k$  bezeichnet. Außerdem seien die Mittelpunkte  $\mathbf{m}_i^k$ , die Kantenvektoren  $\mathbf{e}_i^k$  und die Verschiebungsvektoren  $\mathbf{d}_i^k$  wie bei der Definition des 4-Punkt-Schemas in 2.3 definiert. Die Kanten  $E_i^k$  werden als konvexe Hülle von  $\{\mathbf{p}_i^k, \mathbf{p}_{i+1}^k\}$  definiert.

Der Einfachheit halber wird in diesem Kapitel immer angenommen, dass  $P^0$  eine Rechtskurve ist. Durch die Konvexitätserhaltung und der Interpolationseigenschaft sind damit alle daraus erzeugten Polygone  $P^k$  ebenfalls Rechtskurven. Außerdem werden die Tangenten nach jeder Unterteilung für jeden Punkt neu gewählt. Weiter werden die Endkanten zunächst ignoriert. Die Richtungsvektoren der Tangenten werden immer so gewählt, dass  $\angle(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{t}_i^k) > 0$ .

Der Beweis in diesem Kapitel funktioniert so, dass die Bedingungen für Satz 6.7 aus [Paluszny et al. '85] mit bestimmten Annahmen für das konvexe Schema gezeigt werden, woraus folgt, dass das Schema  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt. Diese Annahmen werden aber nicht bewiesen, sondern in Kapitel 4 experimentell untersucht. Da das konvexe Schema ein „Fill-In-Scheme“, wie in [Paluszny et al. '85] definiert, ist, folgt aus Satz 6.7 sofort:

**Satz 3.0.6:**

*Sei  $P$  eine Folge von streng konvexen Polygonen, welche durch das konvexe Schema aus  $P^0$  erzeugt wurden. Angenommen, es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass für alle neu gewählten Punkte  $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$  für die Winkelverhältnisse  $\sigma := \angle(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{e}_{2i}^{k+1}) / \angle(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{t}_i^k)$  und  $\tau := \angle(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{e}_{2i+1}^{k+1}) / \angle(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{t}_{i+1}^k)$  gilt  $\sigma, \tau \in [\delta, 1 - \delta]$ . Dann ist die Grenzkurve  $P^\infty$   $C^1$ -stetig.*

Die Annahmen von Satz 3.0.6 werden unten untersucht. Zuvor wird im Folgenden angegeben, wie man das konvexe Schema dazu bringen kann, Ecken zu erzeugen. Dann wird dieses Gegenbeispiel durch eine Bedingung ausgeschlossen, und es werden zwei weitere Annahmen getroffen, mit denen dann die  $C^1$ -Stetigkeit der vom konvexen Schema erzeugten Kurven bewiesen wird. Danach folgt noch eine interessante Randbemerkung zum konvexen Schema und es wird ein konvexitäts-

### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

erhaltendes Schema aus Satz 3.0.6 konstruiert, welches  $C^1$ -stetige Grenzkurven erzeugt.

## 3.1 Gegenbeispiel

Das konvexe Schema, wie in [Marinov et al. '05] beschrieben, erzeugt nicht für jede beliebige Wahl der Tangenten eine glatte Kurve. Es ist möglich, durch geschickte Wahl der Tangenten eine Ecke zu erzeugen.

Dazu nimmt man einen beliebigen Punkt  $\mathbf{p}_i^0$  aus  $P^0$ , und wählt einen Infimumswinkel  $\alpha \in (0, -\text{winkel}(\mathbf{p}_i^0))$  für diesen Punkt. Die Nachbartangenten  $T_{2^{k_i-1}}^k$  und  $T_{2^{k_i+1}}^k$  werden immer so gewählt, dass  $\alpha_{k+1} := -\text{winkel}(\mathbf{p}_{2^{k+1}i}^{k+1}) > \alpha$ .

Das ist immer möglich, denn die Nachbartangenten  $T_{2^{k_i-1}}^k$  und  $T_{2^{k_i+1}}^k$  lassen sich beliebig nah an  $\mathbf{e}_{2^{k_i-1}}^k$  beziehungsweise  $\mathbf{e}_{2^{k_i}}^k$  herandrehen. Der neu gewählte Punkt wird damit beliebig nah an den Mittelpunkt der Kanten herangeschoben, wodurch  $\alpha_{k+1}$  beliebig nah an  $\alpha_k$  geschoben werden kann und dadurch größer als  $\alpha$  ist.

Daher muss die Wahl der Tangenten eingeschränkt werden, damit die durch das konvexe Schema erzeugten Kurven im Allgemeinen  $C^1$ -stetig sein können.

## 3.2 Einschränkungen

### Bedingung 3.2.1:

Die Tangenten werden so gewählt, dass es ein festes  $\nu > 0$  gibt, sodass für alle  $k \geq 0$  und für alle  $i \in \{1, \dots, i_{max}^k - 1\}$  gilt

$$\frac{\angle(\mathbf{e}_{i-1}^k, \mathbf{t}_i^k)}{\text{winkel}(\mathbf{p}_i^k)} \in [\nu, 1 - \nu]. \quad (3.2.1)$$

Durch Bedingung 3.2.1 wird die Konstruktion des Gegenbeispiels in 3.1 verhindert, da die Tangenten mit dieser Bedingung nicht beliebig nah an die adjazenten Kanten gedreht werden können.

Die folgenden beiden Bedingungen werden in dieser Arbeit nicht bewiesen. Sie werden beim Beweis der  $C^1$ -Stetigkeit der durch das konvexe Schema erzeugten Kurven vorausgesetzt und benötigt. Es ist nicht bekannt, ob sie immer erfüllt sind, aber es wurden experimentell Hinweise darauf gefunden, dass die Kantenlängenverhältnisse beschränkt sind, und die Winkelverhältnisse für bestimmte Werte von  $w$  und  $c$  beschränkt sind. Die Experimente werden in Kapitel 4 beschrieben.

### Bedingung 3.2.2:

$$\exists \rho > 0 : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \text{gültige } i : \frac{\text{winkel}(\mathbf{p}_i^k)}{\text{winkel}(\mathbf{p}_{i+1}^k)} \in \left[ \rho, \frac{1}{\rho} \right].$$

**Bedingung 3.2.3:**

$$\exists q > 0 : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \forall \text{gültige } i : \frac{|\mathbf{e}_i^k|}{|\mathbf{e}_{i+1}^k|} \in \left[ q, \frac{1}{q} \right].$$

Das bedeutet, dass die Winkelverhältnisse zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten beschränkt sind, und dass die Längenverhältnisse zweier aufeinanderfolgender Kanten beschränkt sind.

Wie man leicht nachprüft, erfüllt die natürliche Tangentenwahl Bedingung 3.2.1, falls die Kantenlängenverhältnisse beschränkt sind und die  $\text{winkel}(\mathbf{p}_i^k)$  gegen null konvergieren wenn  $k$  gegen unendlich geht, was im folgenden Abschnitt gezeigt wird. Die winkelhalbierende Tangentenwahl erfüllt diese Bedingung per Konstruktion.

### 3.3 Verhalten der Eckenwinkel

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die Winkel im Polygon bei Anwendung des konvexitätserhaltenden Schemas ändern. Dabei wird insbesondere Bedingung 3.2.2 benutzt.

Um den folgenden Beweis zu vereinfachen, werden zunächst Winkelfunktionen für einen anderen Wertebereich als bisher definiert.

**Definition 3.3.1:**

Sei  $\angle^+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [0, 2\pi)$  der Winkel von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  im Uhrzeigersinn. Sei  $\text{winkel}^+(\mathbf{e}_i^k) := \angle^+(\mathbf{e}_{i-1}^k, \mathbf{e}_{i+1}^k)$ .

**Lemma 3.3.2:**

Es gibt ein festes  $\alpha \in (0, 1)$ , sodass für alle Kantenrichtungen  $\mathbf{e}_i^k \in P^k$  gilt:  $\text{winkel}^+(\mathbf{e}_{2i}^{k+1}) \leq \alpha \cdot \text{winkel}^+(\mathbf{e}_i^k)$  und  $\text{winkel}^+(\mathbf{e}_{2i+1}^{k+1}) \leq \alpha \cdot \text{winkel}^+(\mathbf{e}_i^k)$ .

*Beweis.* Wähle  $\alpha := 1 - \nu\rho$  mit  $\nu > 0$  aus Bedingung 3.2.1 und  $\rho \in (0, 1)$  als Schranke für die Winkelverhältnisse aus Bedingung 3.2.2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{winkel}^+(\mathbf{e}_{2i}^{k+1}) &= \angle^+(\mathbf{e}_{2i-1}^{k+1}, \mathbf{e}_{2i+1}^{k+1}) \\ &\leq \angle^+(\mathbf{e}_{2i-1}^{k+1}, \mathbf{t}_{i+1}^k) \\ &\leq \angle^+(\mathbf{e}_{2i-1}^{k+1}, \mathbf{e}_{i+1}^k) - \nu \cdot \angle^+(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{e}_{i+1}^k) \\ &\leq \angle^+(\mathbf{e}_{i-1}^k, \mathbf{e}_{i+1}^k) - \nu \cdot \angle^+(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{e}_{i+1}^k) \\ &= \angle^+(\mathbf{e}_{i-1}^k, \mathbf{e}_i^k) + (1 - \nu) \cdot \angle^+(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{e}_{i+1}^k) \\ &\leq (1 - \nu\rho) \cdot \text{winkel}^+(\mathbf{e}_i^k) \\ &= \alpha \cdot \text{winkel}^+(\mathbf{e}_i^k). \end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass  $\text{winkel}^+(\mathbf{e}_{2i+1}^{k+1}) \leq \alpha \cdot \text{winkel}^+(\mathbf{e}_i^k)$  gilt. □

### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

#### Folgerung 3.3.3:

Mit Lemma 3.3.2 folgt, dass die Winkel zwischen den zwei zu einer Kante adjazenten Kanten gegen null konvergieren. Außerdem konvergiert  $\max_{\angle E} := \max_i |\text{winkel}(e_i^k)|$  gegen null, wenn  $k$  gegen unendlich geht.

Damit gilt:

#### Satz 3.3.4:

Der Wert  $\max_{\angle P} := \max_i |\text{winkel}(p_i^k)|$  konvergiert gegen null, wenn  $k$  gegen unendlich geht.

Und es folgt:

#### Folgerung 3.3.5:

Für jedes  $\epsilon \in (0, \pi/2)$  gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $k \geq k_0$  und für alle  $i \in \{1, \dots, i_{\max}^k\}$  gilt

$$\angle(\mathbf{t}_i^k, \mathbf{e}_{i-1}^k) \in (0, \pi/2 - \epsilon], \quad (3.3.2)$$

und für alle  $i \in \{0, \dots, i_{\max}^k - 1\}$  gilt

$$\angle(\mathbf{e}_i^k, \mathbf{t}_i^k) \in (0, \pi/2 - \epsilon]. \quad (3.3.3)$$

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass die Winkel der Kanten adjazent zu einem Knoten gegen null konvergieren, wenn  $k$  gegen unendlich geht. Das vereinfacht die folgenden Beweise, weil die  $\text{winkel}(\mathbf{p}_i^k)$  immer als klein angenommen werden können.

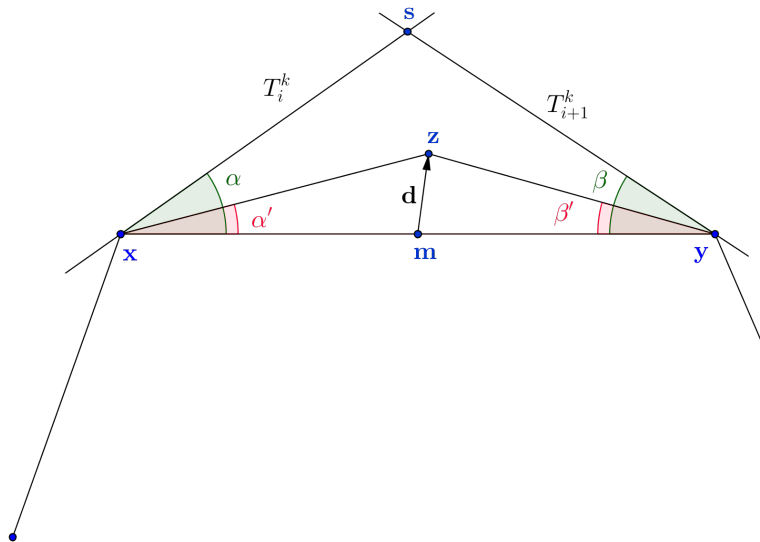
## 3.4 Schranken für die Winkelverhältnisse

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Winkelverhältnisse  $\sigma$  und  $\tau$  innerhalb des von Satz 3.0.6 geforderten Intervalls liegen. Dabei sind die Konstanten  $w \in (0, 1/8)$  und  $c \in (0, 1)$  des konvexen Schemas fest. Betrachte zur Veranschaulichung Abbildung 3.1. Es werden immer für beliebiges  $k \geq 0$  und beliebiges  $i \in \{1, i_{\max}^k - 2\}$  die Punkte  $\mathbf{x} := \mathbf{p}_i^k$  und  $\mathbf{y} := \mathbf{p}_{i+1}^k$  betrachtet, welche bei der Unterteilung erhalten bleiben. Weiter wird der vom konvexen Schema neu eingefügte Punkt  $\mathbf{z} := \mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$ , der Mittelpunkt  $\mathbf{m} := \mathbf{m}_i^k$  von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  und der Verschiebungsvektor  $\mathbf{d} := \mathbf{d}_i^k$  betrachtet. Außerdem wird der Punkt  $\mathbf{s} := T_i^k \cap T_{i+1}^k$  betrachtet, falls er existiert. Der Mittelpunkt und der Verschiebungsvektor seien wie in Abschnitt 2.3 definiert. Für  $\mathbf{z}$  muss gelten, dass

$$\sigma = \frac{\alpha'}{\alpha} := \frac{\angle(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\angle(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{s})} \in [\delta, 1 - \delta], \quad (3.4.4)$$

$$\tau = \frac{\beta'}{\beta} := \frac{\angle(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x})}{\angle(\mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{x})} \in [\delta, 1 - \delta], \quad (3.4.5)$$

für ein  $\delta > 0$ .



**Abbildung 3.1:** Die grundlegende Situation beim Beweis der Schranken für die Winkelverhältnisse.

## Aussagen über den Tangens

Hier werden Aussagen über den Tangens bewiesen, die in späteren Beweisen benutzt werden.

### Lemma 3.4.1:

Sei  $a \in (0, 1)$  fest. Dann gilt für alle  $x > 0$ :

$$\frac{\arctan(a \cdot x)}{\arctan(x)} \geq a.$$

*Beweis.* Für  $x > 0$  ist  $\arctan'(x) \in (0, 1)$  streng monoton fallend und  $\arctan(x) > 0$ . Damit ist  $\arctan(a \cdot x) / \arctan(x)$  streng monoton steigend und es gilt

$$\frac{\arctan(a \cdot x)}{\arctan(x)} \geq \frac{a \cdot x}{x} = a.$$

□

### Lemma 3.4.2:

Seien  $a \in (0, 1)$  und  $\hat{x} > 0$  fest. Dann gibt es ein  $\hat{y} < 1$ , sodass für alle  $x \in D := (0, \hat{x}]$ :

$$\frac{\arctan(a \cdot x)}{\arctan(x)} \leq \hat{y}.$$

### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

*Beweis.* Für  $x > 0$  ist  $\arctan'(x) > 0$  streng monoton fallend und  $\arctan'(x) > 0$ .  
Damit ist  $\arctan(a \cdot x)/\arctan(x)$  streng monoton steigend und es gilt

$$\frac{\arctan(a \cdot x)}{\arctan(x)} \leq \frac{\arctan(a \cdot \hat{x})}{\arctan(\hat{x})} =: \hat{y}.$$

□

**Lemma 3.4.3:**

Seien  $a \in (0, 1]$  und  $\hat{x} > 0$  fest. Dann gibt es ein  $y > 0$ , sodass für alle  $x \in D := (0, \hat{x}]$ :

$$\frac{\arctan(a \cdot x)}{x} \geq y$$

*Beweis.*  $\arctan$  ist streng monoton steigend und  $\arctan'(a \cdot x) \leq 1 = x'$  für  $x \in D$ .  
Daher ist  $\arctan(a \cdot x)/x$  streng monoton fallend und es gilt

$$\frac{\arctan(a \cdot x)}{x} \geq \frac{\arctan(a \cdot \hat{x})}{\hat{x}} =: y$$

□

**Lemma 3.4.4:**

Seien  $a \in (0, 1)$  und  $\epsilon > 0$  fest. Dann gibt es ein  $y > 0$ , sodass für alle  $x \in D := (0, \pi/2 - \epsilon]$ :

$$\frac{\tan(a \cdot x)}{\tan(x)} \geq y \tag{3.4.6}$$

*Beweis.* Für  $x \in D$  ist  $\tan(x) > 0$  streng monoton steigend und  $\tan'(x) > 0$  streng monoton steigend. Damit ist  $\tan(a \cdot x)/\tan(x)$  streng monoton fallend und es gilt

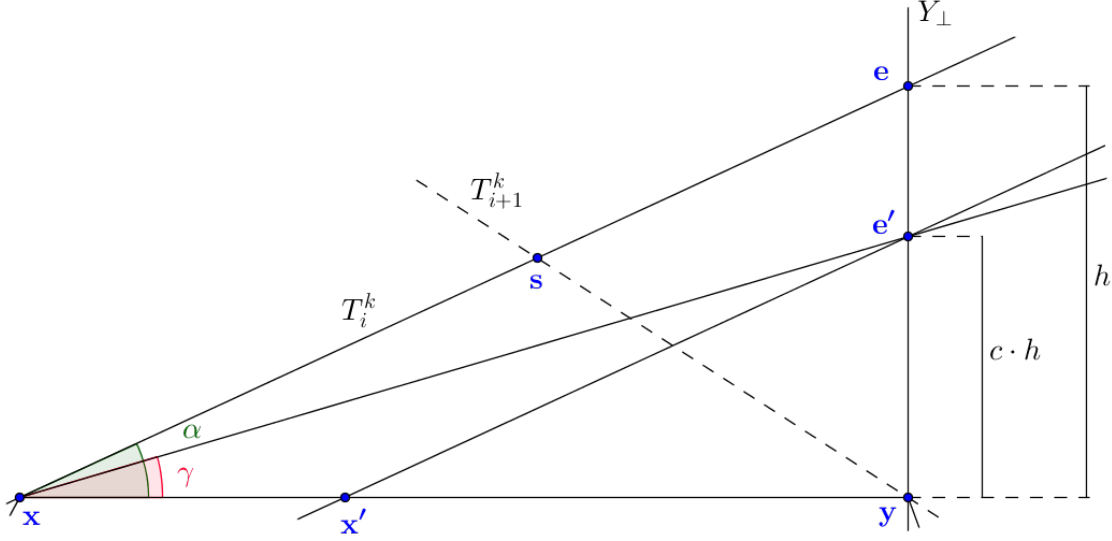
$$\frac{\tan(a \cdot x)}{\tan(x)} \geq \frac{\tan(a \cdot (\pi/2 - \epsilon))}{\tan(\pi/2 - \epsilon)} =: y$$

□

### Obere Schranke

Zuerst wird gezeigt, dass eine obere Schranke  $\zeta < 1$  existiert, sodass die Winkelverhältnisse  $\sigma$  und  $\tau$  für jeden vom konvexen Schema neu eingefügten Punkt  $\mathbf{z}$  kleiner oder gleich  $\zeta$  sind.

Beachte im Folgenden, dass  $\mathbf{p}_{i-1}^k$  immer existiert, da  $i \geq 1$ .


 Abbildung 3.2: Skizze zum Beweis der oberen Schranke von  $\sigma$ .

**Lemma 3.4.5:**

Angenommen,  $\mathbf{s}$  existiert und  $\Delta := \text{KonvexeHülle}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}\}$  ist ein Dreieck, welches  $\mathbf{p}_{i-1}^k$  nicht enthält. Sei  $c \in (0, 1)$ . Dann wird der neue Punkt  $\mathbf{z}$  in einem Dreieck  $\Delta' = \text{KonvexeHülle}\{\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{s}'\}$  gewählt, welches eine Skalierung des Dreiecks  $\Delta$  mit Zentrum  $\mathbf{m}$  und Skalierungsfaktor  $c$  ist.

*Beweis.* Da  $\Delta$  den Punkt  $\mathbf{p}_{i-1}^k$  nicht enthält und  $P^k$  streng konvex ist, zeigt  $\mathbf{d}$  von  $\mathbf{m}$  aus in das Dreieck  $\Delta$ .

Falls  $\mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot w \in \Delta'$ , dann wird  $\mathbf{z} = \mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot w$  wie gefordert gewählt.

Falls  $\mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot w \notin \Delta'$ , dann wird  $\mathbf{z} = \mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot \min\{c \cdot \psi_i^k, c \cdot \chi_i^k\}$  gewählt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot \psi_i^k &\in T_i^k, \\ \mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot \chi_i^k &\in T_{i+1}^k. \end{aligned}$$

Damit gilt  $\mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot \min\{\psi_i^k, \chi_i^k\} \in \text{Rand}(\Delta)$ , und  $\mathbf{z} \in \text{Rand}(\Delta') \subset \Delta'$ .  $\square$

Mit Lemma 3.4.5 kann nun die obere Schranke für  $\sigma$  und  $\tau$  gezeigt werden.

**Lemma 3.4.6:**

Es gibt ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $k \geq k_0$  die neuen Punkte  $\mathbf{z}$  so gewählt werden, dass die Winkelverhältnisse  $\sigma$  und  $\tau$  kleiner oder gleich  $\zeta$  sind.

*Beweis.* Abbildung 3.2 dient zur Veranschaulichung des Beweises.

Wähle  $\epsilon \in (0, \pi/2)$  fest. Dann gibt es nach Folgerung 3.3.5 ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  sodass für für alle  $k \geq k_0$  die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  kleiner oder gleich  $\pi/2 - \epsilon$  sind. Damit existiert

### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

der Punkt  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{p}_{i-1}^k$  liegt nicht im Dreieck  $\Delta$  aus Lemma 3.4.5. Sei  $\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{s}'$  das skalierte Dreieck aus Lemma 3.4.5.

Betrachte zunächst nur das Verhältnis  $\sigma$ . Sei  $Y_\perp$  die Orthogonale von  $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$  durch  $\mathbf{y}$ . Sei  $\mathbf{e}$  der Schnittpunkt von  $\overline{\mathbf{x}\mathbf{s}}$  und  $Y_\perp$ . Sei  $\mathbf{e}'$  der Schnittpunkt von  $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{s}'}$  und  $Y_\perp$ . Diese Punkte befinden sich in dem von  $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$  begrenzten Halbraum, in dem auch  $\mathbf{s}$  liegt. Dann ist das Verhältnis  $|\mathbf{e}'\mathbf{e}|/|\mathbf{y}\mathbf{e}'| = (1 - c)/c$ .

Sei  $h := |\mathbf{y}\mathbf{e}| > 0$ . Sei o. B. d. A.  $|\mathbf{x}\mathbf{y}| = 1$ . Dann ist  $h$  nach oben beschränkt, da  $\alpha \leq \pi/2 - \epsilon$ .

Wegen Folgerung 3.3.5 wird  $\mathbf{z}$  unterhalb von  $\mathbf{x}\mathbf{e}'$  gewählt. Sei  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  und  $\mathbf{x}\mathbf{e}'$ . Dann ist  $\tan(\alpha) = h$  und  $\tan(\gamma) = c \cdot h$ . Das ist äquivalent zu  $\alpha = \arctan(h)$  und  $\gamma = \arctan(c \cdot h)$ .

Da  $c \in (0, 1)$  fest und  $h > 0$  nach oben beschränkt ist, gilt wegen Lemma 3.4.1 und Lemma 3.4.2

$$\frac{\arctan(c \cdot h)}{\arctan(h)} \in [c, \zeta]$$

für ein  $\zeta < 1$ . Also gilt:

$$\sigma = \frac{\alpha'}{\alpha} \leq \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\arctan(c \cdot h)}{\arctan(h)} \leq \zeta.$$

Mit einer symmetrischen Konstruktion folgt, dass  $\tau$  kleiner oder gleich dem selben  $\zeta$  ist.  $\square$

Damit ist die obere Schranke für  $\sigma$  und  $\tau$  gezeigt.

### Untere Schranke

Als nächstes wird gezeigt, dass es eine untere Schranke  $\eta > 0$  für die Winkelverhältnisse  $\sigma$  und  $\tau$  gibt.

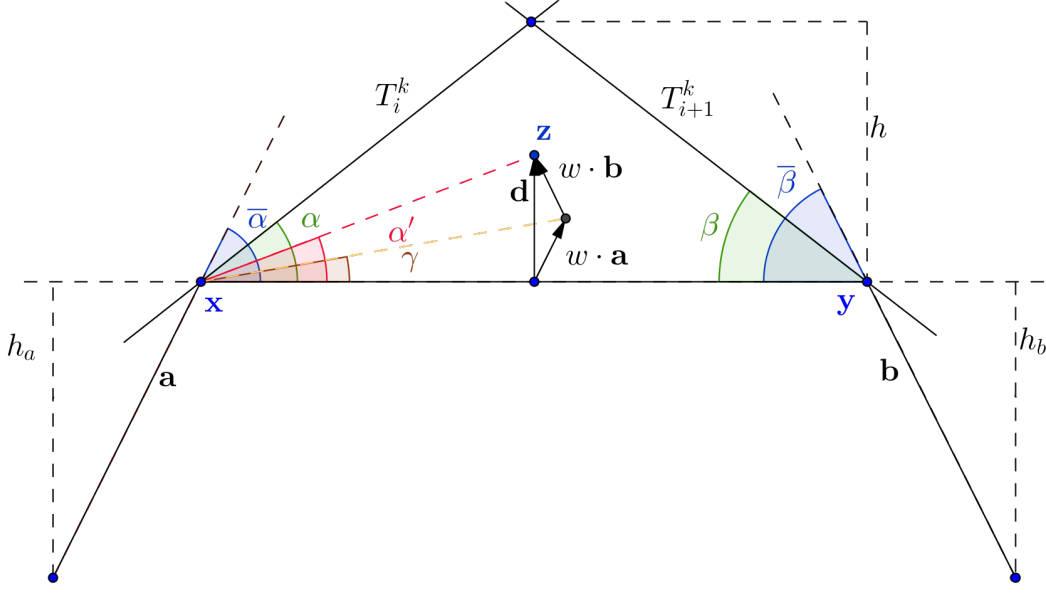
Zunächst wird gezeigt, dass es eine untere Schranke  $\tilde{\eta} > 0$  für die Winkelverhältnisse gibt, wenn  $w_i^k = w$  gewählt wird, wenn also die mögliche Verkürzung vom Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  durch die Tangenten außer acht gelassen wird.

#### Lemma 3.4.7:

*Wenn  $w_i^k = w$  gewählt wird, dann gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass alle neuen Punkte  $\mathbf{z}$  mit  $k \geq k_0$  mit nach unten beschränkten Winkelverhältnissen  $\sigma, \tau \geq \tilde{\eta}$  gewählt werden.*

*Beweis.* Es gilt  $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ ,  $0 < \beta < \bar{\beta}$  mit  $\bar{\alpha} := -\text{winkel}(\mathbf{x})$ ,  $\bar{\beta} := -\text{winkel}(\mathbf{y})$ . Nach Folgerung 3.3.5 gibt es ein  $k_0$ , sodass für alle  $k \geq k_0$  die Winkel  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$  kleiner oder gleich  $\pi/2$  sind. Es sei  $q \in (0, 1]$  die Schranke für die Seitenlängenverhältnisse. Weiter seien  $\mathbf{a} := \mathbf{e}_{i-1}^k$  und  $\mathbf{b} := -\mathbf{e}_{i+1}^k$ . Es sei  $h_a := |\mathbf{a}| \cdot \sin(\bar{\alpha}) > |\mathbf{a}| \cdot \sin(\alpha)$





**Abbildung 3.3:** Skizze zum Beweis der unteren Schranke von  $\sigma$  und  $\tau$  für  $w_i^k = w$ .

der zu  $\mathbf{xy}$  orthogonale Anteil von  $\mathbf{a}$ . Außerdem sei o. B. d. A.  $|\mathbf{xy}| = 1$ . Damit gilt  $|\mathbf{a}| \in [q, \frac{1}{q}]$ .

Betrachte zunächst nur das Verhältnis  $\sigma$ .

Es sei  $\alpha' := \angle(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z} = (\mathbf{m} + w \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})))$  und  $\gamma := \angle(\mathbf{y}, \mathbf{x}, (\mathbf{m} + w \cdot \mathbf{a}))$ . Dabei gilt  $\alpha' \geq \gamma$ , da  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ .

Damit lässt sich  $\tan(\gamma)$  abschätzen mit

$$\tan(\gamma) = \frac{w|\mathbf{a}| \sin(\bar{\alpha})}{\frac{1}{2} + w|\mathbf{a}| \cos(\bar{\alpha})} \geq \frac{w|\mathbf{a}| \sin(\alpha)}{\frac{1}{2} + w|\mathbf{a}| \cos(\alpha)} \geq \frac{2w|\mathbf{a}| \sin(\alpha)}{3} \geq \frac{4w|\mathbf{a}|}{3\pi} \alpha \geq \frac{wq}{\pi} \alpha.$$

Mit Lemma 3.4.3 lässt sich  $\gamma/\alpha$  abschätzen mit

$$\begin{aligned} \gamma &\geq \arctan \left( \underbrace{\frac{wq}{\pi} \alpha}_{<1} \right) \geq \frac{wq}{\pi} \cdot \arctan(\alpha) \geq \frac{wq}{\pi} \cdot y \cdot \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} &\geq \frac{wqy}{\pi \arctan(\pi/2)} =: \tilde{\eta} \end{aligned}$$

für ein  $y > 0$ . Damit ist  $\sigma = \alpha'/\alpha \geq \tilde{\eta}$ , wenn  $k$  größer als  $k_0$  ist. Analog lässt sich zeigen, dass  $\tau \geq \tilde{\eta}$  gilt, wenn  $k$  größer als  $k_0$  ist.  $\square$

Damit kann gezeigt werden, dass die Winkelverhältnisse  $\sigma$  und  $\tau$  durch ein  $\eta > 0$  nach unten beschränkt sind.

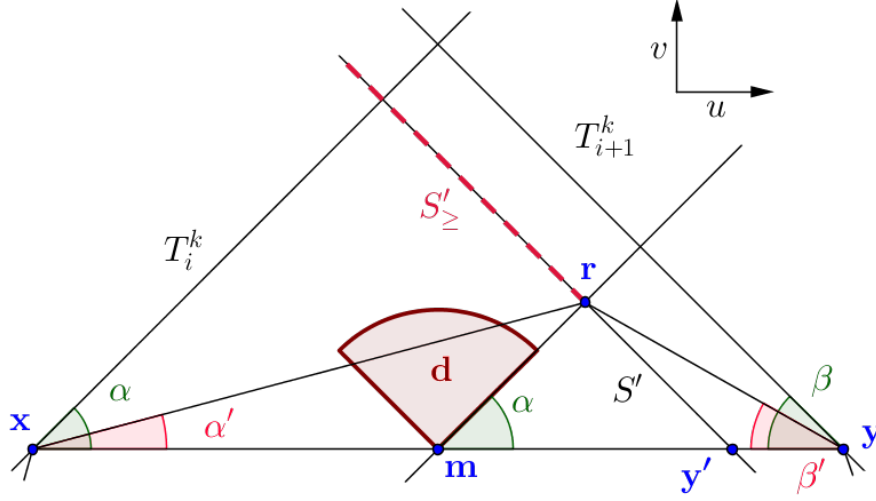


Abbildung 3.4: Skizze zum Beweis über die untere Schranke von  $\sigma$  und  $\tau$ .

**Lemma 3.4.8:**

Es gibt ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass alle neuen Punkte  $\mathbf{z}$  mit  $k \geq k_0$  mit nach unten beschränkten Winkelverhältnissen  $\sigma, \tau \geq \eta > 0$  gewählt werden.

*Beweis.* Nach Lemma 3.4.7 gibt es eine untere Schranke  $\tilde{\eta}$  für  $\sigma$  und  $\tau$ , wenn  $w_i^k = w$  gewählt wird. Sei im Folgenden  $w_i^k < w$ .

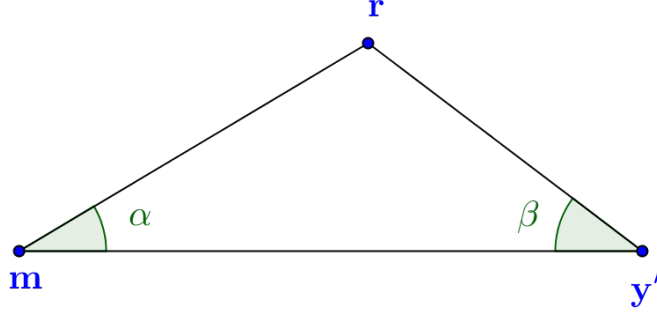
Betrachte zunächst nur den Fall  $\psi_i^k \geq \chi_i^k$ .  $\mathbf{z}$  wird damit auf der Strecke  $S' := \text{KonvexeHülle}\{\mathbf{y}', \mathbf{s}'\}$  gewählt.

Wähle  $\epsilon \in (0, \pi/2)$  fest. Dann gibt es nach Folgerung 3.3.5 ein  $k_0$ , sodass für alle  $k \geq k_0$  die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  kleiner oder gleich  $\pi/2 - \epsilon$  sind. Damit ist der Winkel  $\angle(\mathbf{y}, \mathbf{m}, \mathbf{z})$  durch  $\alpha$  nach unten beschränkt und abhängig von  $\alpha$  und  $\beta$  ein Punkt  $\mathbf{r} := \{\mathbf{m} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_{i-1}^k\} \cap S'$  definiert. Der Punkt  $\mathbf{z}$  liegt oberhalb von  $\mathbf{r}$ , also  $\mathbf{z} \in S'_\ge := \{\mathbf{r} + \mathbb{R}_0^+ \cdot \mathbf{y}'\mathbf{s}'\} \subset S'$ . Diese Situation ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

Eine untere Schranke für die Winkelverhältnisse von  $\mathbf{z} = \mathbf{r}$  wird also auch von jedem  $\mathbf{z} \in S'_\ge$  erfüllt. Es reicht also zu zeigen, dass für beliebiges  $\alpha \in (0, \pi/2]$  eine untere Schranke  $\eta > 0$  existiert, sodass für den neuen Punkt  $\mathbf{r}$  die Winkelverhältnisse  $\sigma$  und  $\tau$  größer als oder gleich  $\eta$  sind.

Berechne dazu die Koordinaten von  $\mathbf{r}$ . Betrachte zunächst nur das Vereinfachte System aus Abbildung 3.5. Bestimme die minimale  $v$ -Position des Punktes  $\mathbf{r}$ . Dazu sei o. B. d. A.  $\mathbf{m} = (0, 0)$  und  $\mathbf{y}' = (1, 0)$ . Dann ist  $\overline{\mathbf{m}\mathbf{r}}$  bestimmt durch  $v = \tan(\alpha) \cdot u$  und  $\overline{\mathbf{r}\mathbf{y}'}$  durch  $v = \tan(\beta) \cdot (1 - u)$ . Wie man leicht nachrechnet, ist

$$v = \frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}.$$


 Abbildung 3.5: Die Konstruktion des Punktes  $r$ .

Für  $|\mathbf{xy}| = 1$  ist  $u \in [1/2, 1]$  und  $v$  wird mit  $c/2$  skaliert, und es gilt

$$\alpha' = \arctan\left(\frac{c/2 \cdot v}{u}\right) \geq \arctan\left(\frac{c}{2} \cdot v\right) \geq \frac{c}{2} \cdot \arctan(v),$$

$$\beta' = \arctan\left(\frac{c/2 \cdot v}{1-u}\right) \geq \arctan(c \cdot v) \geq \frac{c}{2} \cdot \arctan(v).$$

Schätze jetzt  $\arctan(v)$  ab. Wegen der Beschränkung der Winkelverhältnisse durch  $\rho$  aus Bedingung 3.2.2 und der Einschränkung durch Tangentenrichtungen durch  $\nu$  aus Bedingung 3.2.1 gilt  $\beta \in [\varphi \cdot \alpha, \alpha/\varphi] \cap (0, \pi/2 - \epsilon]$  für  $\varphi := \nu^2 \rho$ .

- Für  $\alpha \in (0, \varphi \cdot (\pi/2 - \epsilon)]$  gilt:

$$\arctan(v) = \arctan\left(\frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}\right) \geq \arctan\left(\frac{\tan^2(\varphi \cdot \alpha)}{2 \cdot \tan(\alpha/\varphi)}\right)$$

Mit  $\tilde{\alpha} := \alpha/\varphi$  und Lemma 3.4.4 gilt für ein  $\mu > 0$ :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{\tan^2(\varphi \cdot \alpha)}{2 \cdot \tan(\alpha/\varphi)}\right) &= \arctan\left(\frac{\tan^2(\varphi^2 \cdot \tilde{\alpha})}{2 \cdot \tan(\tilde{\alpha})}\right) \geq \arctan\left(\frac{\mu}{2} \tan(\varphi^2 \cdot \tilde{\alpha})\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\mu}{2} \tan(\varphi \cdot \alpha)\right) \geq \arctan\left(\frac{\mu \cdot \varphi}{2} \alpha\right) \end{aligned}$$

Damit gilt für die Winkelverhältnisse:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{\alpha} &\geq \frac{c \cdot \arctan(\mu \cdot \varphi/2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha} \geq \frac{c \cdot \arctan(\mu \cdot \varphi/2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha/\varphi} \\ \frac{\beta'}{\beta} &\geq \frac{c \cdot \arctan(\mu \cdot \varphi/2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \beta} \geq \frac{c \cdot \arctan(\mu \cdot \varphi/2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha/\varphi} \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.4.3 gilt:

$$\frac{c \cdot \arctan(\mu \cdot \varphi/2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha/\varphi} \geq \frac{c \cdot \arctan(\mu \cdot \varphi/2 \cdot (\pi/2 - \epsilon))}{2 \cdot (\pi/2 - \epsilon)/\varphi} =: \eta_0$$

### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

- Für  $\alpha \in (\varphi \cdot (\pi/2 - \epsilon), (\pi/2 - \epsilon)]$  gilt:

$$\begin{aligned} \arctan(v) &= \arctan\left(\frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}\right) \\ &\geq \arctan\left(\frac{\tan^2(\varphi \cdot (\pi/2 - \epsilon))}{2 \cdot \tan(\pi/2 - \epsilon)}\right) =: \frac{2}{c} \cdot v_{\min} \end{aligned}$$

$\arctan(v)$  ist also nach unten beschränkt. Damit sind die Winkelverhältnisse ebenfalls nach unten beschränkt, denn:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha'}{\alpha} &\geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\arctan(v)}{\alpha} \geq \frac{v_{\min}}{\pi/2 - \epsilon} \\ \frac{\beta'}{\beta} &\geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\arctan(v)}{\beta} \geq \frac{v_{\min}}{\pi/2 - \epsilon} \end{aligned} \right\} =: \eta_1$$

Damit ist  $\eta := \min\{\tilde{\eta}, \eta_0, \eta_1\}$  für alle  $k \geq k_0$  die untere Schranke für  $\sigma$  und  $\tau$ . Im Fall  $\psi_i^k < \chi_i^k$  ist  $\eta$  für alle  $k \geq k_0$  aus Symmetriegründen ebenfalls die untere Schranke für die Winkelverhältnisse.  $\square$

## Abschluss des Beweises

Es gibt also ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  sodass für alle  $k \geq k_0$  wegen Lemma 3.4.8 eine untere Schranke  $\eta > 0$  und wegen Lemma 3.4.6 eine obere Schranke  $\zeta < 1$  für die Winkelverhältnisse bei Erzeugung der Polygonfolge  $P$  existiert. Damit gibt es ein  $\delta := \min\{\eta, 1 - \zeta\} > 0$ , sodass für alle  $k \geq k_0$  außer an den Endkanten jeder neue Punkt  $\mathbf{z}$  mit Winkelverhältnissen  $\sigma, \tau \in [\delta, 1 - \delta]$  gewählt wird. Außerdem wird in jedem Schritt jede Kante des Polygons unterteilt.

Mit Satz 3.0.6 folgt daher, dass, wenn die Bedingungen aus Abschnitt 3.2 erfüllt sind, das konvexe Schema Grenzkurven erzeugt, die außer in den Endpunkten  $C^1$ -stetig sind. Ist das Eingabepolygon geschlossen, so existieren keine Endpunkte, und die gesamte Grenzkurve ist  $C^1$ -stetig, wenn die Bedingungen aus Abschnitt 3.2 erfüllt sind. Damit ist folgender Satz bewiesen:

#### Satz 3.4.9:

*Gelten Bedingung 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3, dann erzeugt das konvexe Schema  $C^1$ -stetige Grenzkurven.*

## 3.5 Glattheit der dualen Kurve

Die Tangenten einer Kurve bilden eine Kurve im Dualraum, deren Tangenten dual zu den Punkten der Ausgangskurve sind. Haben die Tangenten die normalisierte

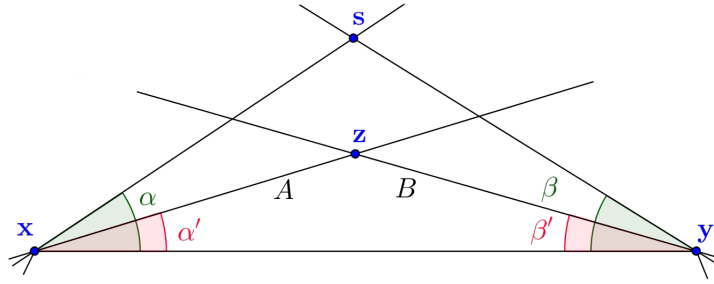


Abbildung 3.6: Unterteilungsschritt des glatten Schemas

Gleichungsdarstellung

$$ax + by + 1 = 0,$$

können die zu ihnen dualen Punkte durch die Koordinatenvektoren  $(a, b)$  dargestellt werden.

Da die durch das konvexe Schema aus einem streng konvexen Eingabepolygon  $P^0$  erzeugte Grenzkurve  $P^\infty$  kein Geradenstück enthält [Marinov et al. '05], enthält die duale Grenzkurve  $P^{*\infty}$  keine Ecke und ist damit  $C^1$ -stetig.

## 3.6 Das glatte Schema

Mit Satz 3.0.6 lässt sich ein konvexitätserhaltendes Schema angeben, welches  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt. Dazu werden die Winkelverhältnisse  $\sigma, \tau \in (0, 1)$  fest gewählt. Das Schema funktioniert bis auf die Wahl der neuen Punkte  $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$  wie das 4-Punkt-Schema. Es wird wie beim konvexen Schema in jedem Schritt jede Kante unterteilt. Die neuen Punkte  $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$  werden dann als Schnittpunkt der Geraden  $A := \{\mathbf{x} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{a}\}$  und  $B := \{\mathbf{y} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{b}\}$  durch die Punkte  $\mathbf{x} := \mathbf{p}_i^k$  bzw.  $\mathbf{y} := \mathbf{p}_{i+1}^k$  gewählt. Die Richtungsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind durch die Winkelverhältnisse wie in Satz 3.0.6 definiert. Der Unterteilungsschritt wird in Abbildung 3.6 veranschaulicht. Dieses Schema wird im folgenden das glatte Schema genannt.



Abbildung 3.7: Von links nach rechts: Das Eingabepolygon, das vom konvexen Schema mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$  und natürlicher Tangentenwahl unterteilte Polygon und das vom glatten Schema mit  $\sigma = \tau = 1/2$  unterteilte Polygon.

### 3 Glattheitsbeweis zum konvexen Schema

Führt man das glatte Schema mit winkelhalbierender Tangentenwahl auf der Kugel mit  $\sigma = \tau = 1/2$  aus, dann ist es dual zum Chaikin-Algorithmus auf der Kugel. In Abbildung 3.7 wird das Ergebnis der Anwendung des konvexen Schemas mit dem Ergebnis der Anwendung des glatten Schemas auf ein Polygon verglichen.

## 4 Untersuchung der nicht bewiesenen Bedingungen

Der Beweis zur Glattheit der durch das konvexe Schema erzeugten Kurven setzt voraus, dass das Schema zwei Eigenschaften aufweist, die nicht bewiesen wurden. Die erste Eigenschaft ist die Beschränkung der Kantenlängenverhältnisse nach Bedingung 3.2.3, die zweite ist die Beschränkung der Winkelverhältnisse nach Bedingung 3.2.2. Beide Eigenschaften wurden experimentell untersucht.

Als Eingabepolygone für die Experimente wurden ein Quadrat und ein Trapez gewählt. Das Quadrat wurde wegen der gleichmäßigen Verteilung der Punkte gewählt. Dadurch wird  $w_i^k$  beim konvexen Schema immer nah an  $w$  gewählt. Das Trapez wurde gewählt, weil das 4-Punkt-Schema hier eine Schleife erzeugt, die durch das konvexe Schema entfernt wird. Hier ist die Beschränkung durch die Tangenten also definitiv relevant. Die Eingabepolygone sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Um möglichst glatte Kurven zu erzeugen, wurde der Spannungsparameter  $w = 1/16$  gewählt, da das 4-Punkt-Schema damit Kurven mit maximaler Hölder-Regularität erzeugt. Außerdem wurde der Skalierungsfaktor  $c = 0,9$  gewählt, um die Beschränkung durch die Tangenten möglichst klein zu halten, sodass das konvexe Schema dem 4-Punkt-Schema möglichst ähnlich ist. Höhere Werte für  $c$  führen zu größeren numerischen Fehlern. Mit dieser sehr einseitigen Parameterwahl wurde versucht, Parameterbelegungen zu finden, für die die Bedingungen 3.2.3 und 3.2.2

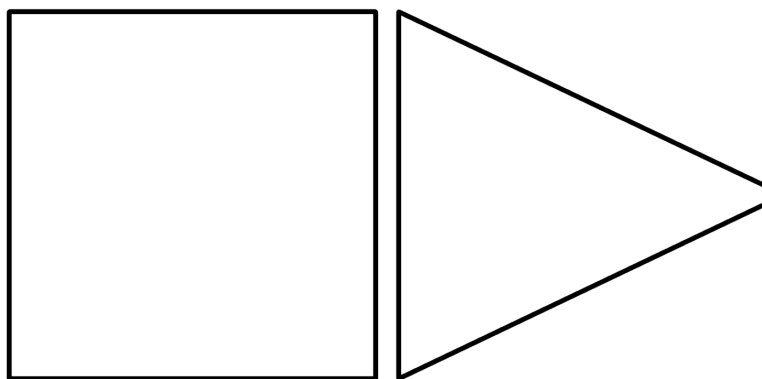


Abbildung 4.1: Das Quadrat und das Trapez für die Experimente

## 4 Untersuchung der nicht bewiesenen Bedingungen

gelten. Weiter wurde noch nach Parameterbelegungen gesucht, für die das Schema die Bedingungen nicht erfüllt.

Untersucht wurde das 4-Punkt-Schema, das konvexe Schema mit natürlicher Tangentenwahl und das konvexe Schema mit winkelhalbierender Tangentenwahl.

Das Polygon nach null Unterteilungsschritten ist das Eingabepolygon. Es werden immer sieben Unterteilungsschritte betrachtet, um numerische Fehler auszuschließen. Für jeden Schritt wird der Maximalwert des jeweiligen Verhältnisses für das Polygon betrachtet. Dabei wird für ein Verhältnis  $q < 1$  der Kehrwert  $1/q > 1$  benutzt.

In den beiden folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Berechnungen ausgewertet.

### 4.1 Kantenlängenverhältnisse

Einige Ergebnisse der Berechnungen der maximalen Kantenlängenverhältnisse sind in den Tabellen A.1 und A.2 dargestellt. Die Kantenlängenverhältnisse sehen in jedem Fall konvergent und damit beschränkt aus. Es wurden auch noch niedrigere Werte für  $c$  getestet, diese führen zu langsamerer Konvergenz. Von  $1/16$  abweichende Werte für  $w$  führen ebenfalls zu langsamerer Konvergenz. Daher ist es wahrscheinlich, dass die Kantenlängenverhältnisse beschränkt sind und Bedingung 3.2.3 erfüllt ist.

### 4.2 Winkelverhältnisse

Einige Ergebnisse der Berechnungen der maximalen Winkelverhältnisse sind in den Tabellen A.3, A.4, A.5, A.6 und A.7 dargestellt.

Der Winkel  $\alpha := |\text{winkel}(p_i^k)|$  an einem Punkt  $\mathbf{p}_i^k$  wurde mit der Formel

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\mathbf{e}_{i-1}^k \cdot \mathbf{e}_i^k}{|\mathbf{e}_{i-1}^k| \cdot |\mathbf{e}_i^k|} \right)$$

berechnet.

Bei der Untersuchung der Winkelverhältnisse ist aufgefallen, dass aufeinanderfolgende Kanten bei Anwendung des konvexen Schemas innerhalb von acht Schritten einen Winkel von null Grad einnehmen können. Der Grund dafür sind Gleitkommaungenauigkeiten, denn das konvexe Schema erhält strenge Konvexität [Marinov et al. '05]. Daher werden nur die Werte bis nach dem siebten Unterteilungsschritt betrachtet.

Das 4-Punkt-Schema erzeugt im fünften Schritt ebenfalls aufeinanderfolgende Kanten mit einem Winkel von null Grad. Daher wäre hier ein Winkelverhältnis von  $\infty$



entstanden. Solche Winkel wurden daher für das Berechnen des Winkelverhältnisses ignoriert. Stattdessen wurde die nächste Ecke zur Berechnung des Verhältnisses benutzt.

Die sehr großen Werte im siebten Schritt des 4-Punkt-Schema sind mit hoher Wahrscheinlichkeit durch Gleitkommafehler entstanden.

Die Winkelverhältnisse des vom konvexen Schemas unterteilten Quadrats scheinen für  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$  gegen 9 zu konvergieren (Tab. A.3). Für  $w = 1/16$  und  $c = 0,8$  scheinen sie gegen 4 zu konvergieren (Tab. A.4). Für das Trapez scheinen die Werte  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$  ebenfalls konvergente Folgen zu erzeugen, die allerdings langsamer konvergieren (Tab. A.5). Für  $w = 1/32$  und  $c = 0,8$  lässt sich mit diesem Experiment keine Aussage treffen (Tab. A.6), für  $w = 1/32$  und  $c = 0,5$  deutet das Experiment auf divergente Winkelverhältnisse hin (Tab. A.7).

Für bestimmte Werte von  $w$  und  $c$  scheinen die Winkelverhältnisse gegen

$$\rho_{\square} := \frac{c}{1-c} \quad (4.2.1)$$

zu konvergieren. Eine genauere Untersuchung dieses Grenzwerts ist nicht Teil dieser Arbeit.

Die Untersuchung der Winkelverhältnisse weist also darauf hin, dass diese für bestimmte Werte von  $w$  und  $c$  beschränkt sind, aber nicht für alle.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das konvexe Schema, eine konvexitätserhaltende Variante des 4-Punkt-Schemas, untersucht. Ziel war die Vermutung von Marinov et al., dass das konvexe Schema glatte Kurven erzeugt, zu bestätigen, zu widerlegen oder genauer zu differenzieren, für welche Eingaben und Parameter das der Fall ist.

Es wurde eine Möglichkeit gefunden, wie das konvexe Schema Ecken erzeugen kann, indem man die Tangenten auf eine bestimmte Weise wählt. Dazu wurde eine Einschränkung angegeben, die diese Tangentenwahl ausschließt. Die Einschränkung wird von der natürlichen und winkelhalbierenden Tangentenwahl eingehalten, und es wirkt künstlich, sie zu brechen. In der Praxis ist sie also kein Hindernis.

Mit so eingeschränkter Tangentenwahl ist es nicht gelungen, zu zeigen, dass das konvexe Schema glatte Kurven erzeugt. Die Glattheit wurde auf zwei Bedingungen, die nicht bewiesen wurden, zurückgeführt. In der experimentellen Untersuchung dieser Bedingungen wurden Hinweise für weitere Arbeiten am Glattheitsbeweis gefunden. Das Kantenlängenverhältnis der durch das konvexe Schema erzeugten Kurvenfolge scheint für jede Eingabekurve beschränkt zu sein. Das Winkelverhältnis aufeinanderfolgender Punkte scheint nicht immer beschränkt zu sein. Allerdings scheinen die Winkelverhältnisse für bestimmte Wahl von  $w$  und  $c$  zu konvergieren, und in diesen Fällen konnte ein vermuteter Grenzwert angegeben werden. Es lässt sich also vermuten, dass das konvexe Schema für manche Parameterwahlen glatte Kurven erzeugt, es aber auch bei eingeschränkter Tangentenwahl noch Fälle gibt, in denen das nicht zutrifft.

Es wurden noch zwei weitere Unterteilungsschemata vorgestellt, die während der Erstellung der Arbeit entstanden sind. Zum einen wurde herausgefunden, dass das zum konvexen Schema duale Schema  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt. Zum anderen wurde aus dem für den Glattheitsbeweis genutzten Satz 3.0.6 ein Schema konstruiert, das strenge Konvexität erhält und  $C^1$ -stetige Kurven erzeugt.

Die Frage nach der Glattheit der durch das konvexe Schema erzeugten Kurven konnte zwar nicht vollständig beantwortet werden, aber das Problem konnte auf zwei Teilprobleme reduziert werden, sodass ein Grundstein für weitere Arbeiten gelegt wurde.

# A Ergebnisse der Experimente

**Tabelle A.1:** Maximale Kantenlängenverhältnisse bei Unterteilung eines Quadrats mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$ .

Schritt	4-Punkt-Schema	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	1.00000	1.00000	1.00000
1	1.00000	1.00000	1.00000
2	1.10534	1.10534	1.10534
3	1.07581	1.07581	1.07581
4	1.03677	1.03681	1.03919
5	1.02024	1.02193	1.01985
6	1.01046	1.01540	1.01407
7	1.00539	1.01176	1.01097

**Tabelle A.2:** Maximale Kantenlängenverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$ .

Schritt	4-Punkt-Schema	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	22.14159	22.14159	22.14159
1	4.58684	11.35846	20.32914
2	4.42207	7.11283	16.95619
3	3.23092	5.21371	14.34488
4	1.92784	4.13250	12.03746
5	1.42451	3.43749	10.07312
6	1.20754	2.95543	8.43855
7	1.10512	2.60314	7.15634

## A Ergebnisse der Experimente

**Tabelle A.3:** Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Quadrats mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$ .

Schritt	4-Punkt-Schema	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	1.00000	1.00000	1.00000
1	2.20565	2.20565	2.20565
2	2.16710	2.16710	2.16710
3	2.09186	2.09186	2.09186
4	3.03411	3.03411	3.03411
5	1.59798	9.02178	9.02178
6	2.21128	9.00200	9.00200
7	12285.69136	9.00018	9.00018

**Tabelle A.4:** Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Quadrats mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,8$ .

Schritt	4-Punkt-Schema	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	1.00000	1.00000	1.00000
1	2.20565	2.20565	2.20565
2	2.16710	2.16710	2.16710
3	2.09186	2.09186	2.09186
4	3.03411	3.03411	3.03411
5	1.59798	4.00917	4.00917
6	2.21128	4.00149	4.00149
7	12285.69136	4.00024	4.00024

**Tabelle A.5:** Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit  $w = 1/16$  und  $c = 0,9$ .

Schritt	4-Punkt-Schema	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	1.78669	1.78669	1.78669
1	7.88735	42.95000	7.74597
2	9.27778	53.59486	6.11708
3	10.27382	29.19208	8.30620
4	6.17191	22.66187	8.93841
5	15.78008	19.41048	9.03637
6	10.60591	17.38994	9.00330
7	7459.38476	15.97943	9.02323

**Tabelle A.6:** Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit  $w = 1/32$  und  $c = 0,8$ .

Schritt	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	1.78669	1.78669
1	28.44928	17.14076
2	31.31487	25.52575
3	34.01170	52.37423
4	37.51985	52.27475
5	42.05035	48.70265
6	47.83461	47.49654
7	55.16800	48.16863

**Tabelle A.7:** Maximale Winkelverhältnisse bei Unterteilung eines Trapezes mit  $w = 1/32$  und  $c = 0,5$ .

Schritt	Konvexes Schema mit natürlichen Tangenten	Konvexes Schema mit winkelhalbierenden Tangenten
0	1.78669	1.78669
1	45.82316	17.14076
2	83.99054	38.86947
3	158.50995	91.45728
4	307.50128	159.99333
5	605.47807	298.35514
6	1201.42754	575.98564
7	2393.32430	1131.71516

# Literaturverzeichnis

- [Beccari et al. '07] Carolina V. Beccari, Giulio Casciola und Lucia Romani. An interpolating 4-point  $C^2$  ternary non-stationary subdivision scheme with tension control. *Computer Aided Geometric Design*, 24, S. 210–219, 2007.
- [Catmull & Clark '78] Edwin Catmull und Jim Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10, S. 350–355, 1978.
- [Chaikin '74] George Merrill Chaikin. An algorithm for high-speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3, S. 346–349, 1974.
- [Dubuc '86] Serge Dubuc. Interpolation through an Iterative Scheme. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114, S. 185–204, 1986.
- [Dyn & Levin '95] Nira Dyn und David Levin. Analysis of Asymptotically Equivalent Binary Subdivision Schemes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 193, S. 594–621, 1995.
- [Dyn et al. '87] Nira Dyn, David Levin und John A. Gregory. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design*, 4, S. 257–268, 1987.
- [Dyn et al. '90] Nira Dyn, David Levin und John A. Gregory. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 9, S. 160–169, April 1990.
- [Dyn et al. '91] Nira Dyn, John A. Gregory und David Levin. Analysis of Uniform Binary Subdivision Schemes for Curve Design. *Constructive Approximation*, 7, S. 127–147, 1991.
- [Hechler et al. '09] Jochen Hechler, Bernhard Mößner und Ulrich Reif.  $C^1$ -continuity of the generalized four-point scheme. *Linear Algebra and its Applications*, 430, S. 3019–3029, Juni 2009.
- [Levin '99] David Levin. Using Laurent polynomial representation for the analysis of non-uniform binary subdivision schemes. *Advances in Computational Mathematics*, 11, S. 41–54, 1999.
- [Marinov et al. '05] Martin Marinov, Nira Dyn und David Levin. Geometrically Controlled 4-Point Interpolatory Schemes. *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, S. 301–315, 2005.

- [Micchelli & Prautzsch '88] Charles A. Micchelli und Hartmut Prautzsch. Refinement and Subdivision for Spaces of Integer Translates of a Compactly Supported Function. In D. F. Griffiths und G. A. Watson (Hrsg.), *Numerical Analysis 1987*, S. 192–222. Longman Publishing Group, White Plains, NY, USA, 1988.
- [Paluszny et al. '85] Marco Paluszny, Hartmut Prautzsch und Martin Schäfer. A geometric look at corner cutting. *Computer Aided Geometric Design*, 14, S. 421–447, 1985.
- [Sabin & Dodgson '04] Malcolm A. Sabin und Neil A. Dodgson. A Circle-Preserving Variant of the Four-Point Subdivision Scheme. *Mathematical methods for curves and surfaces*, 6, S. 1–12, 2004.
- [Schröder '99] Peter Schröder. Foundations I: Basic Ideas. In *Subdivision for Modeling and Animation*, S. 15–20, <http://www.multires.caltech.edu/pubs/sig99notes.pdf>, 1999.